

MARCIN KUJAWA

STATYKA I ANALIZA  
WRAŻLIWOŚCI RUSZTÓW  
ZBUDOWANYCH Z PRĘTÓW  
CIENKOŚCIENNYCH

ANALIZA TEORETYCZNA  
I BADANIA DOŚWIADCZALNE

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*monografie*

97

POLITECHNIKA GDAŃSKA

MARCIN KUJAWA

STATYKA I ANALIZA  
WRAŻLIWOŚCI RUSZTÓW  
ZBUDOWANYCH Z PRĘTÓW  
CIENKOŚCIENNYCH  
ANALIZA TEORETYCZNA  
I BADANIA DOŚWIADCZALNE



GDAŃSK 2009

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

*Romuald Szymkiewicz*

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

*Janusz T. Cieśliński*

REDAKTOR SERII

*Jerzy M. Sawicki*

RECENZENCI

*Zbigniew Kotakowski*

*Elżbieta Urbańska-Galewska*

PROJEKT OKŁADKI

*Jolanta Cieślawska*

Wydano za zgodą  
Rektora Politechniki Gdańskiej

Wydawnictwa PG można nabywać w Księgarni PG (Gmach Główny, I piętro)  
bądź zamówić pocztą elektroniczną ([ksiegarnia@pg.gda.pl](mailto:ksiegarnia@pg.gda.pl)),  
faksem (058 347 16 18) lub listownie (Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej,  
Księgarnia PG, ul. G. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk)  
[www.pg.gda.pl/WydawnictwoPG](http://www.pg.gda.pl/WydawnictwoPG)

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej  
Gdańsk 2009

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie  
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978-83-7348-280-7

# SPIS TREŚCI

Przedmowa .....	5
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ .....	7
1. WPROWADZENIE .....	9
1.1. Istniejący stan wiedzy w zakresie tematu badań .....	9
1.2. Cel i zakres pracy .....	14
2. PODSTAWY WYTRZYMAŁOŚCIOWE TEORII PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O PRZEKROJU OTWARTYM .....	16
3. ANALIZA PRACY RUSZTU .....	29
3.1. Metoda analizy wykorzystująca ideę superelementów .....	31
3.1.1. Liniowa macierz sztywności elementu cienkościennego .....	31
3.1.1.1. Zginanie .....	32
3.1.1.2. Skręcanie skrepowane .....	34
3.1.2. Macierz sztywności superelementu .....	40
3.1.3. Wpływ konstrukcji węzła na rozkład bimomentów w przekrojach przywęzłowych ....	45
3.1.4. Problem wpływu długości współpracującej na rozkład sił wewnętrznych w superelementie .....	50
3.1.5. Opis algorytmu numerycznego – model mieszany .....	51
3.2. Przykłady numeryczne .....	51
3.2.1. Przykład 1 Wspornik cienkościenny bez usztywnień .....	51
3.2.2. Przykład 2 Wspornik cienkościenny z usztywnieniami w postaci przewiązek lub przepony .....	58
3.2.3. Przykład 3 Ruszt cienkościenny .....	61
4. BADANIA EKSPERYMENTALNE .....	65
4.1. Rys historyczny .....	65
4.2. Opis i wyniki badań własnych .....	66
4.2.1. Określenie stałych materiałowych .....	67
4.2.2. Określenie współczynnika $\eta$ korygującego wartość sztywność czystego skręcania $J_d$ .....	70
4.2.3. Opis modeli badawczych .....	72
4.2.4. Wyniki badań – model 1 .....	78
4.2.5. Wyniki badań – model 2 .....	81
4.2.6. Wyniki badań – model 3 .....	85
4.2.7. Wyniki badań – model 4 .....	90
5. WERYFIKACJA KONCEPCJI MODELI Z WYKORZYSTANIEM SUPERELEMENTÓW .....	97
5.1. Porównanie wyników modeli teoretycznych z badaniami eksperymentalnymi .....	97
5.1.1. Przykład 1 – model 1 .....	97
5.1.2. Przykład 2 – model 2 .....	101
5.1.3. Przykład 3 – model 3 .....	106
5.1.4. Przykład 4 – model 4 .....	113
5.2. Wnioski końcowe z porównania wyników modeli teoretycznych z badaniami eksperymentalnymi .....	121

---

6. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI .....	123
6.1. Wstęp .....	123
6.2. Analiza wrażliwości rzędu pierwszego – opis dyskretny .....	124
6.2.1. Metoda bezpośrednia .....	124
6.2.2. Metoda układów sprzężonych .....	125
6.3. Przykłady numeryczne.....	125
6.3.1. Analiza wrażliwości kąta skręcenia w zależności od położenia przepony wzdłuż prętów dźwigara załamane w planie .....	126
6.3.2. Analiza wrażliwości bimomentu przy ciągłej zmianie szerokości póltek .....	129
7. PODSUMOWANIE I KIERUNKI DALSZYCH BADAŃ .....	132
Bibliografia .....	134
Streszczenie w języku polskim .....	139
Streszczenie w języku angielskim .....	140
Załącznik 1 Tabele pomiarowe – stałe materiałowe .....	141
Załącznik 2 Tabele pomiarowe – zestawienie wartości naprężeń normalnych w wybranych przekrojach poprzecznych .....	146

# WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$A$	– biegun pomocniczy współrzędnych wycinkowych; pole przekroju poprzecznego pręta, dowolny punkt przekroju
$\mathbf{B}$	– macierz funkcji kształtu
$B$	– bimoment, biegun współrzędnej wycinkowej; środek skręcania, dowolny punkt przekroju
$B_w, B_\theta, B_\varphi, B_\zeta$	– współczynniki przekazu bimomentu ze względu na jednostkowe przemieszczenie pionowe $w$ , kąt skręcania $\theta$ , kąt obrotu $\varphi$ , deplanację $\zeta$
$\mathbf{C}$	– pewna macierz współczynników równania zginania lub skręcania pręta
$C, \bar{C}$	– stałe całkowania
$E$	– moduł Younga (współczynnik sprężystości podłużnej)
$G$	– moduł Kirchhoffa (współczynnik sprężystości poprzecznej)
$EJ_\omega, GJ_d$	– sztywność wycinkowa (skrępowana) i sztywność czystego (swobodnego) skręcania pręta cienkościennego
$\mathbf{K}, \mathbf{k}_L$	– globalna macierz sztywności, macierz sztywności elementu
$K_{Bi}$	– sztywność skręcania skrępowanego
$M$	– dowolny punkt linii środkowej
$M_s$	– moment skręcający
$M_x$	– moment czystego skręcania (de Saint–Venanta)
$M_\omega$	– moment giętno–skrętny
$M_y, M_z$	– momenty zginające względem osi $y, z$
$N$	– siła podłużna
$\mathbf{P}$	– wektor obciążeń
$P, \Delta P$	– osiowa siła zewnętrzna, przyrost obciążenia
$\mathbf{Q}$	– wektor sił przywęzłowych
$S_y, S_z$	– momenty statyczne określonej części przekroju pręta względem osi $y$ i $z$
$S_\omega$	– wycinkowy moment styczny określonej części przekroju pręta
$T_y, T_z$	– składowe siły poprzecznej o kierunkach osi $y, z$
$U$	– energia potencjalna układu
$W, \bar{W}$	– funkcja wrażliwości, zmodyfikowana funkcja wrażliwości
$d$	– wymiar gabarytowy przekroju poprzecznego
$d(s)$	– szerokość pasma poligonalnego przekroju pręta
$h$	– wysokość przekroju
$h(s)$	– odległość punktu od stycznej do linii środkowej w innym punkcie
$k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$	– giętno–skrętna charakterystyka pręta (współczynnik zanikania)
$l$	– długość pręta
$l_w$	– długość współpracująca
$m(x)$	– moment skręcający obciążenia $p(x)$ względem osi biegunów wycinkowych (osi ścinania)
$p_x, p_y, p_z$	– składowe stanu obciążenia w układzie kartezjańskim
$\mathbf{q}$	– wektor przemieszczeń
$s$	– współrzędna w układzie walcowym
$t_L, t_P$	– siły styczne do krawędzi podłużnych z lewej i prawej strony elementu
$t(s)$	– odległość punktu od normalnej do linii środkowej w innym punkcie
$t_0(x)$	– strumień naprężeń stycznych

<b>u</b>	– wektor zmiennych projektowych
$u, w, v$	– składowe stanu przemieszczenia w układzie kartezjańskim
$x, y, z$	– współrzędne w układzie kartezjańskim
$y_A, z_A$	– współrzędne kartezjańskie bieguna współrzędnych wycinkowych
$y_B, z_B$	– współrzędne kartezjańskie środka skręcania
$\alpha$	– kąt obrotu
$\gamma$	– odkształcenia postaciowe
$\delta = \delta(s)$	– grubość ścianki przekroju poprzecznego
$\varepsilon, \varepsilon_{1,2}, \Delta\varepsilon$	– odkształcenie, odkształcenia główne, przyrost odkształcenia
$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, s)$	– składowa stanu odkształcenia wzdłuż osi pręta
$\varepsilon_s = \varepsilon_s(x, s)$	– składowa stanu odkształcenia na kierunku stycznej do linii środkowej
$\xi(x), \eta(x), \zeta(x) = \theta'(x) = \theta'$	– przesunięcia liniowe punktów linii środkowej w kierunku osi $z, y, x$ (translacje)
$\eta$	– współczynnik korygujący wartość momentu bezwładności czystego skręcania
$\theta = \theta(x) = \theta_x$	– kąt skręcania przekroju pręta
$\bar{\lambda}$	– wektor zmiennych sprzężonych
$\nu$	– współczynnik Poissona
$\sigma_x$	– składowa stanu naprężeń normalnych wzdłuż osi pręta
$\sigma_s$	– składowa normalna stanu naprężenia w układzie walcowym
$\tau_s$	– składowa naprężenia stycznego od czystego skręcania
$\tau_{xs} = \tau(x, s)$	– składowa naprężenia stycznego od spaczenia
$\Phi$	– pewien wektor równania zginania lub skręcania pręta
$\omega(s)$	– współrzędna wycinkowa (pole wycinkowe)
$\omega = \bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}}$	– deplanacja
$\bar{\omega}$	– deplanacja konturu
$\bar{\bar{\omega}}$	– deplanacja ścianek